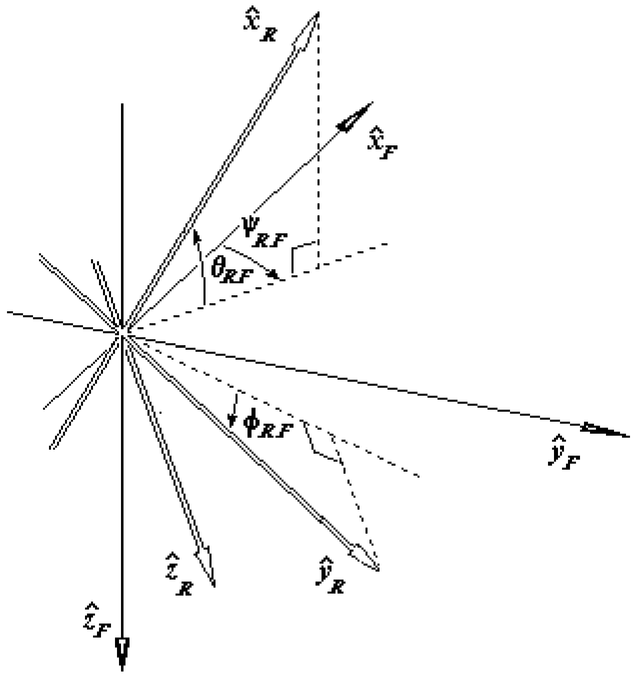
2.3 Eulers vinklar

Definition

För definition av ett systems $\boldsymbol{S_R}$ vinkelläge relativt ett annat $\boldsymbol{S_F}$ används vanligen de s k eulerska vinklarna, vilka definieras[2] enl fig 2.3.1.



Figur 2.3.1

I fig 2.3.1 är systemens inbördes läge valt så att alla tre vinklarna är positiva.

Vinklarnas definitioner kan alltså uttryckas på följande sätt:

$$\left.\begin{array}{ll} \phi_{RF} \ldots\ldots & \text{Vinkeln mellan } \hat{y}_R \text{ och } \hat{x}_F\hat{y}_F \text{ - planet, mätt i } \hat{y}_R\hat{z}_R \text{ - planet.} \\ & -\pi < \phi_{RF} \le \pi \\ \theta_{RF} \ldots\ldots & \text{Vinkeln mellan } \hat{x}_R \text{ och } \hat{x}_F\hat{y}_F \text{ - planet, mätt i } \hat{x}_R\hat{z}_F \text{ - planet.} \\ & -\pi/2 \le \theta_{RF} \le \pi/2 \\ \psi_{RF} \ldots\ldots & \text{Vinkeln mellan } \hat{x}_F \text{ och } \hat{x}_R\hat{z}_F \text{ - planet, mätt i } \hat{x}_F\hat{y}_F \text{ - planet.} \\ & 0 \le \psi_{RF} < 2\pi \end{array}\right\} \quad \text{................................ Ekv 2.3.1}$$

Attityden $\overline{\varphi}_{\boldsymbol{RF}}$ kan erhållas genom tre konsekutiva vridningar, utgående från ett läge, där systemen(s axelriktningar) sammanfaller:

---

[2]Eulerska vinklar kan definieras på ett antal olika sätt, se tex ref 7. Den definition som ges här är dock helt allenarådande inom flygmekaniken och därmed hela flygtekniken.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & \text{Vridning vinkeln } \psi_{RF} \text{ kring } \hat{z}_R \\ \\ \text{II} & \text{Vridning vinkeln } \theta_{RF} \text{ kring } \hat{y}_R \\ \\ \text{III} & \text{Vridning vinkeln } \phi_{RF} \text{ kring } \hat{x}_R \end{array}\right\} \qquad \text{..................Ekv 2.3.2}$$

Läsaren rekommenderas att själv verifiera att ordningsföljden mellan vridningarna är viktig.

Förfarandet enl (2.3.2) är emellertid inte det enda sättet att nå det aktuella läget - det går t ex alltid att hitta en vridningsaxel, sådan att man med *en* vridning kring *en* axel kan nå ett visst läge. Man bör därför se (2.3.1)eller fig 2.3.1 som den egentliga definitionen av eulervinklarna och (2.3.2) som en följdsats eller en beräkningsmetod.

Transformationsmatrisen $M_{RF} = f\left(\vec{\varphi}_{RF}\right)$

Transformationsmatrisen $\boldsymbol{M_{FR}}$ uttryckt i Eulers vinklar spelar en viktig roll i mekaniken. Den kan härledas på följande sätt:

Antag två hjälpsystem, $\boldsymbol{S_A}$ och $\boldsymbol{S_B}$, sådana att

- $\boldsymbol{S_A}$ erhålles ur $\boldsymbol{S_F}$ genom vridning vinkeln ψ_{RF} kring $\hat{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{A}}$
- $\boldsymbol{S_B}$ erhålles ur $\boldsymbol{S_A}$ genom vridning vinkeln θ_{RF} kring $\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{B}}$
- $\boldsymbol{S_R}$ erhålles ur $\boldsymbol{S_B}$ genom vridning vinkeln ϕ_{RF} kring $\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{R}}$

Då gäller ($\bar{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{P}}$ är en godtycklig vektor)

$$\bar{\boldsymbol{r}}_P^F = \boldsymbol{M}_{FA} \cdot \bar{\boldsymbol{r}}_P^A$$
$$\bar{\boldsymbol{r}}_P^A = \boldsymbol{M}_{AB} \cdot \bar{\boldsymbol{r}}_P^B$$
$$\bar{\boldsymbol{r}}_P^B = \boldsymbol{M}_{BR} \cdot \bar{\boldsymbol{r}}_P^R$$

Succesiv insättning ger

$$\bar{\boldsymbol{r}}_P^F = \boldsymbol{M}_{FA} \cdot \boldsymbol{M}_{AB} \cdot \boldsymbol{M}_{BR} \cdot \bar{\boldsymbol{r}}_P^R$$

Men

$$\bar{\boldsymbol{r}}_P^F = \boldsymbol{M}_{FR} \cdot \bar{\boldsymbol{r}}_P^R$$

Alltså

$$\boldsymbol{M}_{FR} = \boldsymbol{M}_{FA} \cdot \boldsymbol{M}_{AB} \cdot \boldsymbol{M}_{BR} \qquad \text{..................Ekv 2.3.3}$$

där delmatriserna $\boldsymbol{M_{FA}}$, $\boldsymbol{M_{AB}}$ och $\boldsymbol{M_{BR}}$ ger vridningarna I, II och III enligt ekv 2.3.2. De är enkla att härleda, eftersom var och en av dem endast vrider kring en enda axel. Efter hopmultiplikation fås

$$M_{FR} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{RF}\cos\psi_{RF} & \sin\phi_{RF}\sin\theta_{RF}\cos\psi_{RF} - \cos\phi_{RF}\sin\psi_{RF} & \cos\phi_{RF}\sin\theta_{RF}\cos\psi_{RF} + \sin\phi_{RF}\sin\psi_{RF} \\ \cos\theta_{RF}\sin\psi_{RF} & \sin\phi_{RF}\sin\theta_{RF}\sin\psi_{RF} + \cos\phi_{RF}\cos\psi_{RF} & \cos\phi_{RF}\sin\theta_{RF}\sin\psi_{RF} - \sin\phi_{RF}\cos\psi_{RF} \\ -\sin\theta_{RF} & \sin\phi_{RF}\cos\theta_{RF} & \cos\phi_{RF}\cos\theta_{RF} \end{pmatrix}$$

.................Ekv 2.3.4

I (2.3.4) har matrisbeteckningen och vinklarna *olika* indexordning. Den matris, vars beteckning har *samma* indexordning som vinklarna, fås genom transponering av (2.3.4):

$$M_{RF} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{RF}\cos\psi_{RF} & \cos\theta_{RF}\sin\psi_{RF} & -\sin\theta_{RF} \\ \sin\phi_{RF}\sin\theta_{RF}\cos\psi_{RF} - \cos\phi_{RF}\sin\psi_{RF} & \sin\phi_{RF}\sin\theta_{RF}\sin\psi_{RF} + \cos\phi_{RF}\cos\psi_{RF} & \sin\phi_{RF}\cos\theta_{RF} \\ \cos\phi_{RF}\sin\theta_{RF}\cos\psi_{RF} + \sin\phi_{RF}\sin\psi_{RF} & \cos\phi_{RF}\sin\theta_{RF}\sin\psi_{RF} - \sin\phi_{RF}\cos\psi_{RF} & \cos\phi_{RF}\cos\theta_{RF} \end{pmatrix}$$

.................Ekv 2.3.5

Det ligger nära till hands att tro att det skulle finnas ett mycket enkelt, kanske t o m linjärt samband av typen

$$\bar{\varphi}_{RF} = f(\bar{\varphi}_{FR})$$

men den bistra verkligheten är den att f är en mycket komplicerad funktion i det allmänna fallet. Den är emellertid enkel att härleda:
Bilda M_{FR} genom att i (2.3.5) sätta in FR-indicerade vinklar. Sätt den så uppkomna matrisen lika med M_{FR} enligt (2.3.4) och lös ut ϕ_{RF}, θ_{RF} och ψ_{RF}.